**Министерство образования Республики Беларусь**

**Белорусский государственный университет**

**Факультет Прикладной математики и инфоРМАТИКИ**

**Кафедра информационных систем управления**

**Отчет о выполнении лабораторной работы №2 по «МВ»**

**Численное интегрирование**

Подготовил студент  
3 курса 12 группы  
Полывяный Глеб Андреевич

Преподаватель  
Будник А.М.

Минск, 2022

Оглавление

[**Постановка задачи: Вариант (б).** 3](#_Toc121706393)

[**Первое задание:** 4](#_Toc121706394)

[**Второе задание:** 6](#_Toc121706395)

[**Третье задание:** 9](#_Toc121706396)

# **Постановка задачи: Вариант (б).**

Дан интеграл .

1. Пользуясь выражением для погрешности интегрирования, определить шаг h в составной квадратурной формуле Правых *прямоугольников*, который обеспечит вычисление с точностью .
2. Для вычисления интеграла применим квадратурную формулу Гаусса при заданном n. Варианту (б) соответствует . Оценить погрешность через формулу .
3. Провести сравнительный анализ полученных результатов. Установить влияние АСТ на точность численного интегрирования.

**Генерация начальных данных**

Для функции:

- 12)

= 0,7

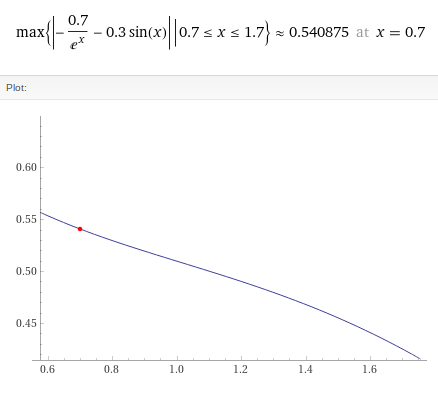
Интервал:

;

# **Первое задание:**

Погрешность интегрирования для составной квадратурной формулы правых прямоугольников вычисляется по следующей формуле:

Найдем оценку сверху для погрешности, максимизировав функцию:



Нам необходимо, чтобы . Выразим из формулы количество разбиений:

Соответственно оценим h:

Результат:

27044

**Результаты вычислений:**

Точное значение, посчитанное с помощью библиотечной функции:

I = 0.323965382781506

Значение, полученное с помощью правых прямоугольников:

= 0.323956363469671

Верхняя оценка теоретической погрешности метода правых прямоугольников(должна быть меньше 10-5 т.к. мы вычисляли N относительно неё):

9.99991e-6

Реальная погрешность относительно точного решения:

= 9.01931e-6

**Вывод:**

Видно, что реальная погрешность согласуется с теоретической, и обе из них меньше чем 10-5, значит необходимая точность для данного интеграла действительно достигается при N = 27044 и соответственно при

**Листинг:**

Получение точного значения:

I\_exact\_value = Decimal(integrate.quad(f, a, b)[0])

Вычисление интеграла методом правых прямоугольников:

def integrateRightRect() -> Decimal:

result = Decimal(0)

h = (b - a) / N

for i in range(1, N + 1):

result += f(a + h \* i)

return h \* result

Вычисление теоретической погрешности:

def theoreticalErrorRightRect() -> Decimal:

return -((b - a) \*\* 2) / (2 \* N) \* fDerivative(a)

Вычисление реальной погрешности:

def realError(val: Decimal, exact\_val: Decimal) -> Decimal:

return abs(exact\_val - val)

Функция первой производной:

def fDerivative(x: Decimal) -> Decimal:

return -VARIANT\_COEF \* Decimal(math.exp(-x)) - (1 - VARIANT\_COEF) \* Decimal(math.sin(x))

# **Второе задание:**

Чтобы вычисления интеграла с применением квадратурной формулы Гаусса при заданном .

Для этого нужно найти корни на интервале для полинома Лежандра.

Для n = 5 имеем:

Корни данного уравнения:

*-0.932469514203152;*

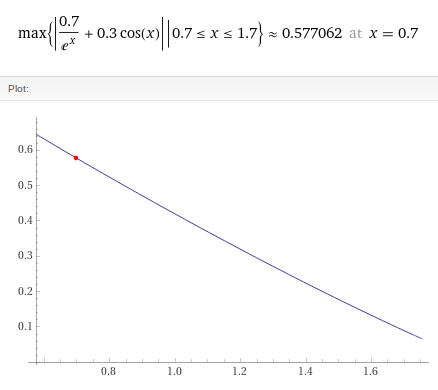
Чтобы получить для нужного интервала, выполним преобразование:

Посчитать приближенное значение интеграла можно формулой Гаусса:

Коэффициенты найдём по формуле:

Найдем оценку сверху для погрешности квадратурной формулы Гаусса по формуле:

Максимизируя производную и получаем оценку сверху:



**Результаты вычислений:**

Точное значение, посчитанное с помощью библиотечной функции:

I = 0.323965382781506

Значение, полученное с помощью правых прямоугольников:

= 0.323956363469671

Значение, полученное с помощью квадратурной формулы Гаусса:

= 0.323965382781506

Оценка сверху теоретической погрешности для метода Гаусса:

1.08542e-16

Реальная погрешность:

= 4.15907e-17

**Вывод:**

Заметим, что точность вычислений при использовании функции Гаусса сильно выросла(с 10-6 до 10-17), кроме того обратим внимание, что реальная погрешность так же согласуется с оценкой теоретической: .

**Листинг:**

Вычисление корней полинома Лежандра:

legendre\_nodes = [Decimal(-0.2386191860831969086305017), Decimal(0.2386191860831969086305017), Decimal(-0.6612093864662645136613996), Decimal(0.6612093864662645136613996), Decimal(-0.9324695142031520278123016), Decimal(0.9324695142031520278123016)]

Вычисление иксов для нужного нам промежутка:

def legendreRootsTransformation(x: Decimal) -> Decimal:

return (a + b) / 2 + (b - a) \* (x / 2)

x = [legendreRootsTransformation(legendre\_nodes[i]) for i in range(6)]

Вычисление коэффицентов для функции Гаусса:

def gaussCoefs(x: Decimal) -> Decimal:

return 2 / ((1 - (x \*\* 2)) \* (legendreFirstDerivative(x) \*\* 2))

coefs = [gaussCoefs(legendre\_nodes[i]) for i in range(6)]

Квадратурная функция Гаусса:

def gaussQuadrature(x: list, coefs: list) -> Decimal:

n = 5

result = Decimal(0)

for i in range(n + 1):

result += Decimal(coefs[i]) \* f(x[i])

return result \* (b - a) / 2

Подсчёт теоретической погрешности для метода гаусса:

def theoreticalErrorGauss() -> Decimal:

n = 5

b\_a\_diff = ((b - a) / 2) \*\* (2 \* n + 3)

first\_mul = (2 \*\* (2 \* n + 3)) / ((2 \* n + 3) \* math.factorial(2 \* n + 2))

second\_mul = (math.factorial(n + 1) \*\* 2 / math.factorial(2 \* n + 2)) \*\* 2

return Decimal(b\_a\_diff) \* Decimal(first\_mul) \* Decimal(second\_mul) \* f(a)

# **Третье задание:**

|  |  |
| --- | --- |
| I(точное значение) | 0.323965382781506 |
| Правые прямоугольники: | 0.323956363469671 |
| Гаусс: | 0.323965382781506 |
| – для прямоугольников | 9.01931e-6 |
|  | 1.08542e-16 |
| - для гаусса | 4.15907e-17 |

**Вывод:**

Истинные погрешности согласуются с теоретическими во всех случаях, а так же меньше чем 10-5 как и было сказано по условию. Можно заметить, что методом гаусса точность гораздо лучше(примерно в 1010 раз), это объясняется большим значением АСТ(алгебраической степени точности) у метода гаусса, равной (2n - 1), то есть 9, против АСТ = 0 у метода правых прямоугольников. АСТ в свою очередь показывает наибольшую степень у полинома, при которой будет достигнут точный результат, чем больше степень, тем точнее, но пока степень не равна значению АСТ если же степень будет больше, чем сам АСТ, то и погрешность будет возрастать.